E.N.S.I. de PHYSIQUE option TA session 1987

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à écrire lisiblement, à mettre en évidence les principaux résultats et à donner des démonstrations claires et concises. Les principaux théorèmes utilisés devront être énoncés.

Les candidats pourront admettre les résultats d'une question (ou d'une partie) non résolue pour traiter les questions suivantes.

Préliminaires

On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

1. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, montrer en utilisant une intégration par parties que :

$$\int_a^b g(t) \sin(At)\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0.$$

f désigne désormais une fonction de classe C^1 sur R.

2. Justifier, pour $A > 0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(At)}{t}\,dt$ et en déduire, pour $X > 0$:

$$\int_0^X f(t) \frac{\sin(At)}{t}\,dt - \frac{\pi}{2} f(0) = \int_0^c \frac{f(t) - f(0)}{t} \sin(At)\,dt + \int_c^X \frac{f(t)}{t} \sin(At)\,dt - f(0) \int_c^{+\infty} \frac{\sin(At)}{t}\,dt$$

avec $c \leqslant \mathrm{Inf}(1, X)$ et $c > 0$.

3. Justifier l'existence de M, tel que pour tout t de $]0, 1]$:

$$\left|\frac{f(t) - f(0)}{t}\right| \leqslant M \quad \text{et en déduire} \left|\int_0^c \frac{f(t) - f(0)}{t} \sin(At)\,dt\right| \leqslant c.M.$$

4. Montrer que pour tout $\beta > 0$, il existe B tel que pour tout $A > B$

$$\left|f(0) \int_c^{+\infty} \frac{\sin(At)}{t}\,dt\right| \leqslant \beta.$$

5. Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\int_0^X f(t) \frac{\sin(At)}{t}\,dt \xrightarrow[A \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} f(0)$ (avec $X > 0$).

PREMIÈRE PARTIE

Soit $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+n} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2}\,dt$ avec n dans $\mathbf{N}^*$.

1. Étudier le domaine de définition et la parité de la fonction f_n.

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n.

3. Montrer que f_n est une fonction indéfiniment dérivable et donner l'expression de la dérivée d'ordre p de f_n sous forme d'intégrale.

4. En utilisant la formule de Maclaurin, démontrer que f_n est développable en série entière au voisinage de l'origine. On indiquera le rayon de convergence de la série entière de somme f_n.

Tournez la page S. V. P.

5. Calculer les valeurs $f_1(2)$ et $f_1(4)$ en appliquant la méthode des trapèzes avec un pas de 0,1. (On dressera un tableau des valeurs utiles et on conservera 4 décimales dans le résultat final.) Calculer ensuite $f_1(1)$ à $5 \cdot 10^{-3}$ près en utilisant le développement en série entière de f_1. Donner alors l'allure de la représentation graphique de f_1 en précisant les branches infinies.

6. Montrer que f_n est solution de l'équation différentielle : (E) $y'' - y = -\dfrac{\sin(nx)}{x}$ $x \neq 0$.

7. Déterminer explicitement les fonctions f_n, en utilisant l'équation (E) et les propriétés de f_n.

On montrera que : $f_n(x) = \text{Arctan}(n)\ \text{ch}(x) - \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(nt)}{t}\ \text{sh}(x-t)\ dt$.

DEUXIÈME PARTIE

Soit maintenant $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\ dt = f_n(x) + g_n(x)$ avec n dans N.

1. Étudier le domaine de définition et la parité de la fonction f. Calculer $f(0)$.

2. Montrer que la suite de fonctions g_n (n dans N) converge simplement sur R.

3. Étudier la convergence uniforme, sur R, de la suite de fonctions f_n (n dans N).

4. Montrer que $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$ $x \neq 0$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

5. Démontrer que f est une fonction continue sur R.

6. *a.* Montrer que : $\displaystyle\int_0^X f(u)\ du = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^X \frac{\cos(ut)}{1+t^2}\ du \right) dt$ (on pourra admettre que cette intégrale converge).

b. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\ du$ converge et donner sa valeur (on pourra utiliser les préliminaires).

7. Déduire l'expression de f de celle de f_n obtenue à la fin de la première partie. Vérifier les résultats du 6. *b.* Donner une représentation graphique de f, et étudier si f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

TROISIÈME PARTIE

Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\ dt$.

1. Montrer que h est une fonction définie sur R et que pour tout x et x_0 de R : $|h(x) - h(x_0)| \leqslant \dfrac{\pi}{2} |x - x_0|$.

Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

2. Montrer pour tout x et tout x_0 réels et pour tout t positif ou nul :

$$|\sin(xt) - \sin(x_0 t) - (x - x_0)\, t \cos(x_0 t)| \leqslant |x - x_0|^2 \frac{t^2}{2}$$

puis que :

$$|h(x) - h(x_0) - (x - x_0) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x_0 t)}{1+t^2}\ dt| \leqslant |x - x_0| \left(\int_0^m \frac{|x - x_0|\, t}{2(1+t^2)}\ dt + 2 \int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right).$$

3. En déduire que h est une fonction dérivable sur R et donner sa dérivée.

4. Déterminer h et étudier si h est développable en série entière au voisinage de l'origine.

5. Tracer dans un même repère les représentations graphiques C_f et C_h de f et de h en situant les points d'intersection des deux courbes.